www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE POLYTECHNIQUE

CONCOURS D'ADMISSION 1990

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

OPTION P'

On donne un réel $k \geqslant -1$ et on considère l'équation différentielle E_k $\quad y'' = y^k$.

On se propose d'étudier dans le demi-plan ouvert P caractérisé par $y > 0$ l'ensemble S_k des solutions maximales f de E_k qui vérifient la condition supplémentaire $f'(0) = 0$. On pose $f(0) = m > 0$; on note γ le graphe de f et Γ_k l'ensemble des courbes intégrales γ de E_k lorsque f décrit S_k .

I

Cette partie est consacrée à l'étude de trois cas particuliers.

1. On suppose d'abord k nul.

a. Trouver les solutions $f \in S_0$. Quel est leur intervalle I de définition ? Que sont les courbes intégrales $\gamma \in \Gamma_0$?

b. Discuter, suivant la position du point (x_1, y_1) dans P , le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_0$ passant par (x_1, y_1).

2. Résoudre les mêmes questions lorsque $k = 1$.

3. *Dans toute la suite de la partie* I, on suppose $k = -1$.

a. Montrer sans calculs qu'il existe une et une seule solution $f_0 \in S_{-1}$ pour laquelle $f_0(0) = 1$. Vérifier que toutes les autres solutions $f \in S_{-1}$ sont données par $f(x) = m f_0\left(\frac{x}{m}\right)$. Comment déduit-on le graphe de f de celui de f_0 ?

b. Quel est le sens de la concavité et quels sont les sens de variation de $f \in S_{-1}$?

4.a. Pour $f \in S_{-1}$, $x \geqslant 0$ et $y = f(x)$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $Y = y/m$ et en déduire l'ensemble des valeurs et l'intervalle de définition de f.

b. Dans les mêmes conditions, montrer que $x/y = F(Y)$ où F est la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par

$$F(Y) = \frac{1}{Y}\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}.$$

c. Montrer que, lorsque Y tend vers $+\infty$, $F(Y)$ tend vers 0 (on pourra diviser l'intervalle d'intégration $[1, Y]$ en deux intervalles $[1, A]$ et $[A, Y]$ avec un choix convenable du réel A). En déduire la nature des branches infinies de γ .

d. Montrer que, sur $]1,+\infty[$, la dérivée F' de F s'annule pour une et une seule valeur Y_0 de Y, et que $y' = f'(x) = \frac{y}{x}$ lorsque $Y = Y_0$.

e. Discuter, suivant la position du point (x_1, y_1) dans le quart de plan Q caractérisé par $x_1 \geqslant 0$, $y_1 > 0$, le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_{-1}$ passant par (x_1, y_1) et exprimer en fonction de Y_0 la pente de la demi-droite D située dans Q à laquelle les courbes γ sont toutes tangentes.

5. Soit φ la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $\varphi(Y) = Y/\sqrt{2\ln Y}$.

a. Pour quelle valeur Y_1 de Y la fonction φ atteint-elle son minimum et quelle est la valeur de ce minimum ?

b. A l'aide du changement de variable $t = e^{u^2/2}$, (*) comparer $\int_1^{Y_1} \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}$ à la valeur minimale de φ , puis comparer Y_0 à Y_1 et en déduire que la pente de D est strictement supérieure à 1.

(*) $t = e^{u^2/2}$

.../...

II

Dans toute la suite du problème, on suppose $k > -1$. Lorsque cela simplifiera les notations, on utilisera le paramètre $\alpha = \dfrac{k+1}{2} > 0$.

6.a. Pour $m > 0$ donné, combien y a-t-il de solutions $f \in S_k$ telles que $f(0) = m$?

b. Si f est une telle solution, définie sur un intervalle I, comparer à f la fonction g définie sur l'intervalle J symétrique de I par rapport à 0 par $g(x) = f(-x)$. L'intervalle I est-il symétrique par rapport à 0 ?

c. Quel est le sens de la concavité et quels sont les sens de variation de f ?

7.a. Pour $f \in S_k$, $x \geqslant 0$ et $y = f(x)$, exprimer $y' = f'(x)$ en fonction de y, m et α, puis x en fonction de ces mêmes trois nombres réels, sous forme d'une intégrale. Pour quelles valeurs de α l'intervalle I de définition de f est-il borné ? Exprimer dans ce cas les bornes de I en fonction de m, de α, et d'une intégrale ne dépendant que de α, et indiquer le comportement de γ aux extrémités de I.

b. Dans le cas où I est non borné, montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)/x$ et $f'(x)$ ont la même limite. Quelle est la nature des branches infinies de γ ?

III

L'objet de cette partie est l'étude de la distribution dans le quart de plan Q caractérisé par $x \geqslant 0$ et $y > 0$ de la partie des courbes $\gamma \in S_k$ correspondant à $x \geqslant 0$. On utilisera dans ce but la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par

$$F(Y) = \sqrt{\alpha}\, Y^{\alpha-1} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} \quad . \qquad \left[\sqrt{\alpha}\, Y^{\alpha-1} \int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} \right]$$

8. Soit $x \geqslant 0$ l'abscisse du point d'ordonnée $y \geqslant m > 0$ situé dans Q sur la courbe $\gamma \in S_k$ passant par $(0, m)$. Montrer que

$$y^{\alpha-1} x = F\left(\frac{y}{m}\right) \quad . \qquad \left[y^{\alpha-1} x = F\left(\frac{y}{m}\right) \right]$$

9. On suppose d'abord $k \geqslant 0$, c'est-à-dire $\alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$.

a. Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'ensemble S_k telles que $f_1(0) = m_1 < m_2 = f_2(0)$. S'il existe des réels $x > 0$ tels que $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, soit $\xi > 0$ leur borne inférieure. En comparant sur l'intervalle $[0, \xi]$ f''_1 à f''_2 puis f'_1 à f'_2, montrer que l'existence de ξ est contradictoire.

b. En déduire que F est croissante sur $[1, +\infty[$.

c. Si de plus $\alpha \geqslant 1$, quel est l'ensemble des valeurs de F sur $[1,+\infty[$? En déduire le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_k$ passant par un point (x_1, y_1) fixé dans Q.

10. Dans cette question, on suppose $0 < \alpha < 1$.

a. Justifier, pour tout réel $s > 1$, l'inégalité $\dfrac{1}{\sqrt{s-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{s}} \leqslant \dfrac{1}{2(s-1)^{3/2}}$.

b. En déduire que $\lim\limits_{Y \to +\infty} F(Y) = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}$

.../...

(on pourra, dans l'intégrale qui intervient dans la définition de F, diviser l'intervalle d'intégration $[1, Y]$ en deux intervalles $[1, 2]$ et $[2, Y]$ par exemple).

c. Si $1/2 \leqslant \alpha < 1$, déduire de ce qui précède, selon la position du point (x_1, y_1) dans Q, le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_k$ passant par (x_1, y_1) et dessiner schématiquement la courbe séparant les deux régions obtenues.

11. On s'intéresse désormais *exclusivement* au cas restant à étudier, c'est-à-dire celui où $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

a. Montrer que la dérivée F' de F s'annule au plus une fois sur $]1,+\infty[$.

b. Justifier, pour tout réel $s > 1$, l'inégalité $\dfrac{1}{\sqrt{s-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{s}} \geqslant \dfrac{1}{2\,s^{3/2}}$

et en déduire, lorsque $\alpha \leqslant \frac{1}{3}$, la limite de $Y^{2-\alpha}F'(Y)$ pour Y tendant vers $+\infty$. [$Y^{2-\alpha}F'(Y)$]

c. Lorsque $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{3}$, montrer que F' s'annule pour une et une seule valeur de Y, notée Y_0, et calculer le maximum de F en fonction de Y_0 et α.

d. Toujours pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{3}$, déduire de ce qui précède, selon la position du point (x_1, y_1) dans Q, le nombre des courbes $\gamma \in \Gamma_k$ passant par (x_1, y_1) et dessiner schématiquement les courbes séparant les diverses régions obtenues. Trouver dans Q une courbe tangente en chacun de ses points à l'une des courbes $\gamma \in \Gamma_k$.

12. On suppose enfin que $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$.

a. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^{\alpha}} \right) dt$

est convergente et que la fonction ψ définie par [lire $\int_1^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^{2\alpha}})\,dt$]

$$\psi(\alpha) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t^{2\alpha}-1}} - \frac{1}{t^{\alpha}} \right) dt + \frac{1}{\alpha - 1}$$

est décroissante sur $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$. Quelle est la valeur de $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$? Quel est le signe de ψ sur l'intervalle $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$?

b. En déduire que F' s'annule une fois et une seule sur $]1,+\infty[$ lorsque $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$.

c. Les résultats obtenus dans la question 11.d s'étendent-ils au cas où $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$?

♦ ♦
♦

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail